Leçon 191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

RM

2022-2023

1 Utilisation des nombres complexes

1.1 Modules et arguments d'un nombre complexe

Théorème 1 : Soit $\mathcal{P}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormée $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé. Alors l'application φ qui associe à tout nombre complexe $z = x + iy$ le point $\varphi(z)$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

Remarque 2 : Tout point M du plan $\mathcal{P}$ s'écrit donc de manière unique $M = \varphi(z)$ et peut ainsi être identifié au nombre complexe z. Le plan $\mathcal{P}$ muni de cette identification est appelé plan complexe ou plan d'Argand-Cauchy.

Théorème 3 : a, b, z, z', ω désignent des nombres complexes et A, B, M, M', Ω leurs images respectives dans $\mathcal{P}$.

1) $|z| = OM$ est la distance de O à M et $|b - a| = AB$ est la distance de A à B.

2) L'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - \omega| = \rho$ est identifié au cercle de centre Ω et de rayon $\rho \geq 0$.

3) L'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - \omega| < \rho$ ($|z - \omega| \leq \rho$) est identifié au disque ouvert (fermé) de centre Ω et de rayon $\rho \geq 0$.

4) Pour $A \neq B$, le point M est sur la médiatrice du segment $[AB]$ si et seulement si $|z - a| = |z - b|$.

5) On a que $Re(z\overline{z'}) = xx' + yy'$ est le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'}$ et $Im(\overline{z}z') = xy' - x'y$ est le déterminant de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$.

Théorème 4 : Pour tout suite finie $z_1, ..., z_n$ de nombres complexes non nuls avec $n \geq 2$, on a $|\sum_{k=1}^{n} z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$, l'égalité étant réalisée si et seulement si il existe des réels $\lambda_2, ..., \lambda_n$ tels que $z_k = \lambda_k z_1$ pour $k = 2, ..., n$.

Définition 5 : On dit qu'un réel θ est un argument du nombre complexe non nul z, si $\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Remarque 6 : On retrouve alors la forme trigonométrique d'un nombre complexe z de la forme $z = |z|e^{i\theta}$.

Théorème 7 : • Si θ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$ affixe d'un vecteur non nul $\overrightarrow{v}$, c'est alors une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{v}})$.

• Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 alors un argument de $\frac{z_2}{z_1}$ est une mesure de l'angle orienté $\theta = (\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}})$ et on a $\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}$ et $\sin(\theta) = \frac{\det(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})}{\|\overrightarrow{v_1}\|\|\overrightarrow{v_2}\|}$.

1.2 Le triangle dans le plan complexe

On appelle $\mathcal{T} = ABC$ un vrai triangle la donnée de trois points non alignés A, B, C.

Définition 8 : On dit que $\mathcal{T}$ est orienté positivement (négativement) ou qu'il est direct (indirect) relativement au repère $\mathcal{R}$, si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) > 0$ (< 0).

Théorème 9 : L'aire du triangle $\mathcal{T}$ est $m(\mathcal{T}) = 1/2|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$.

Théorème 10 : Les trois médianes de $\mathcal{T}$ concourent en G d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$ relativement au repère $\mathcal{R}$. Ce point est le centre de gravité de $\mathcal{T}$, et aussi l'isobarycentre de A, B, C.

Théorème 11 : Les trois médiatrices du triangle $\mathcal{T}$ concourent en un point Ω d'affixe ω et les sommets A, B, C sont sur le cercle de centre Ω et de rayon R. C'est le cercle circonscrit à $\mathcal{T}$.

Théorème 12 : Les trois hauteurs de $\mathcal{T}$ sont concourantes en un point H. Relativement au repère $(\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, où Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle $\mathcal{T}$, l'affixe de H est $h = a + b + c$. C'est l'orthocentre de $\mathcal{T}$.

Théorème 13 : Dans un vrai triangle $\mathcal{T}$, le centre du cercle circonscrit , l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés. La droite passant par les point G, Ω, H est la droite d'Euler.

Remarque 14 : L'utilisation des complexes permet ici de caractériser la position des différents points par des équations en fonction des coordonnées de départ de A, B, C. On peut alors trouver des relations pour exprimer que $\mathcal{T}$ est isocèle, rectangle ou encore équilatéral.

1.3 Droites et cercles dans le plan complexe

Théorème 15 : Toute équation de la forme $\alpha z\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0$, où α, γ des réels et βun nombre complexe représente dans $\mathcal{P}$:

- L'ensemble $\mathcal{P}$ tout entier si $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
- L'ensemble vide si $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma \neq 0$.
- Une droite dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$ d'affixe $i\beta$ si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$.

L'ensemble vide si $\alpha \neq 0$ et $|\beta|^2 - \alpha\gamma < 0$.

• Le cercle de centre Ω d'affixe $\omega = -\frac{\beta}{\alpha}$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{|\beta|^2-\alpha\gamma}}{|\alpha|}$ si $\alpha \neq 0$ et $|\beta|^2 - \alpha\gamma \geq 0$.

Corollaire (Appolonius) 16 : Soient a, b deux nombres complexes distincts et λ un réel strictement positif. L'ensemble $E_\lambda = \{z \in \mathbb{C}, |z-b| = \lambda|z-a|\}$ est identifié dans $\mathcal{P}$ à la médiatrice du segment $[AB]$ pour $\lambda = 1$ ou au cercle de centre Ω d'affixe $\omega = \frac{b-\lambda^2 a}{1-\lambda^2}$ et de rayon $R = \frac{\lambda|a-b|}{|1-\lambda^2|}$ pour $\lambda \neq 1$.

Théorème (Ptolémée) 17 : Soient A, B, C, D des points deux à deux distincts. Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscriptible dans un cercle si et seulement si on a $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$ (le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés).

2 Utilisation de l'algèbre linéaire

2.1 Utilisation du déterminant

Théorème 18 : Soient μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $X \subset \mathbb{R}^n$ une parti mesurable. Alors $\mu(u(X)) = |det(u)|\mu(X)$.

Remarque 19 : Ce théorème est à la base du théorème de changement de variable. En effet, une application différentiable agit localement comme sa différentielle qui est une application linéaire.

Application 20 : Soient $v_1, ..., v_n$ appartenant à $\mathbb{R}^n$; on note $\mathcal{P}(v_1, ..., v_n)$ le parallélépipède engendré par $v_1, ..., v_n$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{w \in \mathbb{R}^n, w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n \quad \text{avec} \quad \lambda_i \in [0,1], i = 1, ..., n\}$$

Alors on a $\mu(\mathcal{P}(v_1, ..., v_n)) = |det(v_1, ..., v_n)|$ où μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$, qui correspond donc au volume du parallélépipède de dimension n.

Application (Inégalité d'Hadamard) 21 : Pour $\|.\|$ la norme canonique sur $\mathbb{R}^n$, on a pour $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ que $|\det(v_1, ..., v_n)| \leq \|v_1\|...\|v_n\|$. On a égalité si les v_i forment une famille orthogonale.
Autrement dit, le volume de $\mathcal{P}$ est borné par le produit des longueurs des arêtes de $\mathcal{P}$, et ce volume est maximum si et seulement si $\mathcal{P}$ est un parallélépipède rectangle.

Définition 22 : Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $v_1, ..., v_n$ dans E. On appelle matrice de Gram de $v_1, ..., v_n$ la matrice $MG(v_1, ..., v_n) = (\langle v_i, v_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ et on note $G(v_1, ..., v_n)$ son déterminant.

Théorème 23 : Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension n de base $(v_1, ..., v_n)$, alors on a pour $x \in E$ que $d(x, F)^2 = \frac{G(v_1,...,v_n,x)}{G(v_1,...,v_n)}$.

Définition 24 : On dit que les bases $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$ d'un espace vectoriel réel de dimension finie ont même orientation si $\det(P_{e_i \to e'_i} > 0$ (dans le cas contraire, on dit qu'elles ont une orientation opposée).

Proposition 25 : L'ensemble $\mathbb{B}$ de toutes les bases de E se partage en deux sous-ensembles disjoints non vide : $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \bigcup \mathbb{B}_2$. Toutes les bases de $\mathbb{B}_1$ (et $\mathbb{B}_2$) ont même orientation. $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ sont dites classes d'orientation.

Définition/remarque 26 : On dit que l'on a fixé une orientation de E si l'on a choisis une classe d'orientation. Cela revient à choisir une base $\mathcal{B}$ de E et dire que les bases orientées positivement sont celles de même orientation que $\mathcal{B}$.

Exemple 27 : On a la base canonique $\{e_i\}$ sur $\mathbb{R}^n$, et on muni donc $\mathbb{R}^n$ de l'orientation canonique avec le fait qu'une base $\{v_1, ..., v_n\}$ est orientée positivement si $\det(P_{e_i \to v_i} > 0$, ie $\det(v_1|...|v_n) > 0$.

2.2 Une application sur l'approche d'isobarycentre

Définition 28 : On appelle isobarycentres de $z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}^n$ le nombre complexe $\frac{z_1+...+z_n}{n}$.

Théorème (Déterminant circulant) 29 : Soient $a_0, ..., a_{n-1}$ des nombres complexes. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}$$

Développement 30 : Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, ..., z_n\}$. On définit alors par récurrence une suite de polygones $(P_k)_{k\geq 0}$, avec $P_0 = P$, et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.
Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre g de P avec $g = \dfrac{z_1 + ... + z_n}{n}$.

Dev 1

2.3 Les isométries en dimension 2 et 3

Proposition 31 : Soit $A \in O_2(\mathbb{R})$, alors :

• Soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ et dans ce cas $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. A représente alors une rotation d'angle θ et de centre O.

• Soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ et alors $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. A représente alors une symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$.(Mettre figure)

Proposition 32 : Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = M(f)_{e_i}$, $\{e_i\}$ étant la base canonique. Il existe alors une base $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, orthonormée, telle que

$$A' = M(f)_{e'_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

où $\varepsilon = +1$ si $\det(A) = 1$, ie $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et $\varepsilon = -1$ si $\det(A) = -1$, ie $A \notin SO_3(\mathbb{R})$.

Proposition 33 : Soit $A \in O_3(\mathbb{R})$, $A \neq +-I_3$.

• Si $\det(A) = 1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe E_1 : l'angle (non orienté) de rotation est donné par $TrA = 2\cos\theta + 1$.

• Si $\det(A) = -1$, A représente dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ une rotation autour de l'axe E_{-1} suivie de la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$: l'angle (non orienté) de rotation est donné par $TrA = 2\cos\theta - 1$. En particulier, si $TrA = 1$ on a $\theta = 0$: A représente dans ce cas la symétrie orthogonale par rapport au plan $E_{-1}^{\perp}$, dite aussi réflexion par rapport à $E_{-1}^{\perp}$.

3 Utilisation de la théorie des groupes

3.1 Action de groupe

E est un ensemble non vide et G un groupe.

Définition 34 : On dit que le groupe G opère à gauche sur l'ensemble E si on a une application $(g, x) \in G \times E \mapsto g.x \in E$ telle que : $\forall x \in E, 1.x = x$ et $\forall (g, g', x) \in G^2 \times E, g.(g'.x) = (gg').x$.

Exemple 35 : G agit sur lui même par translation à gauche $g.h = gh$ et par conjugaison $g.h = ghg^{-1}$ avec $(g, h) \in G^2$.
Le Groupe $\mathcal{S}(E)$ agit naturellement sur E par $\sigma.x = \sigma(x)$ où $(\sigma, x) \in \mathcal{S}(E) \times E$.

Définition 36 : Si G opère sur E, on appelle pour tout x dans E l'orbite de x le sous ensemble $O_x = \{g.x | g \in G\}$. Les orbites forment une partition de G.
On dit que l'action est transitive si pour tout $(x, y) \in E^2$, il existe $g \in G$ tel que $x = g.y$, autrement dit il y a une seule orbite. Si le g est unique, elle est dit simplement transitive.

Définition 37 : On dit que l'action est fidèle si le morphisme de groupe $\varphi : g \in G \mapsto (\varphi(g) : x \mapsto g.x) \in \mathcal{S}(E)$ est injectif, autrement dit si $g.x = x$, alors $g = 1$.

Théorème (Cayley) 38 : L'action de G sur lui même par translation à gauche est fidèle et G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}(G)$.

Définition 39 : Si G opère sur E, pour tout x dans E, on appelle le sous-ensemble $G_x = \{g \in G | g.x = x =\}$ le stabilisateur de x.

Théorème (Équations aux classes) 40 : Si G est un groupe fini opérant sur E, on a :

$i)$ En prenant $x_1, ..., x_r$ un système de représantant des orbites, on a $|E| = \sum_{i=1}^{r} |O_{x_i}|$.

$ii)$ On a $|G| = |O_x||Gx|$ pour tout x dans E.

Lemme (Formule de Burnside) 41 : Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. On note r le nombre d'orbites. Alors

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|.$$

où $Fix(g) = \{x \in E | g.x = x\}$.

Développement 42 : Le nombre de colorations distinctes du cube avec c couleurs est

$$\frac{c^2}{24}(c^4 + 3^2 + 12c + 8)$$

Dev 2

Remarque 43 : La notion de groupe est très utile en géométrie. Elle permet la définition d'un espace affine, qui est en faite une action simplement transitive d'un espace vectoriel E sur l'espace affine $\mathcal{E}$.

3.2 Le groupe diédral

Définition 44 : Le groupe diédral D_n est le groupe des isométries du plan euclidien conservant un polygone régulier à n côtés. Il contient n rotations et n symétries. On a donc $|D_n| = 2n$.

Proposition 45 : Un groupe G multiplicatif est isomorphe à D_n, s'il est dicyclique engendré par un élément ρ d'ordre n et un élément $\sigma \neq \rho$ d'ordre 2 tel que $\rho\sigma\rho\sigma = Id$ (ce qui signifie que $\rho\sigma$ est d'ordre 2.

Théorème 46 : 1) Si G est un groupe diédral isomorphe à D_n, on a alors $G = \{Id, \rho, ..., \rho^{n-1}\} \bigcup \{\sigma, \sigma\rho, ..., \sigma\rho^{n-1}\}$.

2) Deux groupes diédraux de type D_n sont isomorphes.

Références :

1. Algèbre et géométrie Rombaldi
2. Cours d'algèbre Perrin
3. Objectif agrégation Beck
4. Algèbre linéaire Grifone